Ein elementarer Beweis der Kreisaxiome der hyperbolischen Geometrie

Von J. STROMMER in Budapest

1. Unter Kreisaxiomen verstehen wir die folgenden beiden Axiome der elementaren ebenen Geometrie:

K. *Wenn A, B, C nicht in einer Geraden gelegene Punkte sind und D ein Punkt der Geraden AB ist, der zwischen A und B liegt, so gibt es einen Punkt B' der Geraden CD, so daß $AB \equiv AB'$ ist.*[1])

K'. *Es seien A, B, C Punkte auf der Geraden a und A, B', C' Punkte auf derselben oder einer anderen Geraden a', so daß C zwischen A und B liegt und B' zwischen A und C' und $AB \equiv AB'$ ist; wenn dann D ein Punkt ist, so daß $CD \equiv DC'$ wird, so gibt es stets einen Punkt E, so daß $AB \equiv AE$ und $CD \equiv DE$ ist.*[2])

Es ist bekannt, daß sich das erste der obigen beiden Axiome auf Grund der Axiome der Verknüpfung, der Anordnung und der Kongruenz für die Ebene aus dem zweiten ableiten läßt.[3])

Schon F. SCHUR hat mit projektiven Methoden bewiesen[4]), daß das Axiom K eine Folge der Axiome I—IV ist, die HILBERT zur Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie angenommen hat[5]), außerdem hat J. C. H. GERRETSEN[6]) und neuerlich P. SZÁSZ[7]) mittels der auf die „Endrechnung" von HILBERT gegründeten Trigonometrie bzw. analytischen Geometrie bewiesen, daß auch das Axiom K' eine Folge der erwähnten Axiome ist.

In dieser Arbeit geben wir auf Grund der Axiome I—IV einen vollständig elementaren, unmittelbaren Beweis beider Axiome.

---

1) Wenn ein Punkt einer Geraden im Inneren eines Kreises liegt, so hat die Gerade einen Punkt mit dem Kreise gemein.

2) Wenn ein Kreis einen Punkt im Inneren und einen Punkt im Äußeren eines anderen Kreises hat, so haben die beiden Kreise einen Punkt gemein.

3) S. z. B. KERÉKJÁRTÓ [5], S. 168—169, oder auch FORDER [1], S. 135.

4) SCHUR [8], S. 319—320.

5) HILBERT [3], S. 137—140, oder auch HILBERT [4], S. 159—164.

6) GERRETSEN [2], S. 565—566.

7) P. SZÁSZ [9], S. 436—437 und P. SZÁSZ [10].

2. Der Beweis beruht auf einer gewissen Zuordnung zwischen den rechtwinkligen Dreiecken und den Vierecken mit drei rechten Winkeln (und einem spitzen), die schon LOBATSCHEFSKY gefunden hat.[8])

Im folgenden werden wir, der Übersichtlichkeit halber, die zu den Lotstrecken $a, b, \ldots$ gehörigen Parallelwinkel stets mit dem entsprechenden kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen, d. h. es ist

$$\alpha = \Pi(a), \quad \beta = \Pi(b), \ldots,$$

und wir verstehen unter den Strecken $a', b', \ldots$ die Strecken, deren Parallelwinkel die Parallelwinkel von $a, b, \ldots$ je zu einem rechten Winkel ergänzen[9]); es wird also

$$\Pi(a) + \Pi(a') = \frac{1}{2}\pi \text{ usw.}$$

Nunmehr hat H. LIEBMANN auf Grund der Axiome I—IV folgenden Satz bewiesen[10]):

Satz I. *Zu jedem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c, den Katheten a und b und den diesen gegenüberliegenden Winkeln λ bzw. μ gibt es ein Viereck mit drei rechten Winkeln und den Seiten c, m', a, l in dieser Reihenfolge, bei dem die Seiten c und l den Winkel β einschließen, und umgekehrt.*

Wenn in dem obigen Viereck mit drei rechten Winkeln sowohl die Rolle der Seiten c und l als auch die der Seiten m' und a gleichzeitig vertauscht wird, so gibt es nach Satz I auch ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse l, den Katheten m' und b und den diesen gegenüberliegenden Winkeln γ bzw. $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Wenn wir in dem obigen Satze statt $a, b, c; \lambda, \mu$ der Reihe nach $b, m', l; \frac{\pi}{2} - \alpha, \gamma$ setzen, so folgt, daß es auch ein Viereck mit drei rechten Winkeln gibt, dessen Seiten der Reihe nach l, c', b, a' sind und in dem die Seiten l und a' den Winkel $\frac{\pi}{2} - \mu$ einschließen; hieraus folgt nach der obigen Überlegung, daß es auch ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse a', den Katheten c' und m' und den diesen gegenüberliegenden Winkeln λ bzw. $\frac{\pi}{2} - \beta$ gibt.

---

[8]) Betreffend die Entstehung dieser Zuordnung und die Literatur darüber sowie die unten erwähnte Abbildung verweisen wir auf die Arbeiten [6] und [7] von H. LIEBMANN.

[9]) Die Existenz der zu dem Parallelwinkel $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$ gehörigen Lotstrecke p hat schon HILBERT ohne Stetigkeitsbetrachtungen bewiesen. (Vgl. HILBERT [3], S. 142—144; s. auch HILBERT [4], S. 165—168).

[10]) LIEBMANN [6], S. 186—189, oder auch LIEBMANN [7], S. 32—35.

Aus den obigen Entwicklungen schließen wir leicht auf den folgenden, von F. ENGEL stammenden

S a t z II. *Es sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c, den Katheten a und b und den diesen gegenüberliegenden Winkeln λ bzw. μ gegeben, und es seien a_1', l_1, c_1, m_1, b_1' beliebige Strecken. Wir ordnen die Strecken a_1', l_1, c_1, m_1, b_1' umkehrbar eindeutig den Strecken a', l, c, m, b' zu derart, daß die Strecken, die den Strecken a_1', l_1, c_1, m_1, b_1' (in dieser Reihenfolge) entsprechen, in der zyklischen Reihenfolge a', l, c, m, b' oder in der entgegengesetzten Reihenfolge aufeinander folgen. Wenn dann jede der Strecken a_1', l_1, c_1, m_1, b_1' mit der nach der obigen Vorschrift ihr eindeutig entsprechenden Strecke gleich ist, so gibt es stets ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c_1, den Katheten a_1 und b_1 und den diesen gegenüberliegenden Winkeln λ_1 bzw. μ_1.*

In dem folgenden Beweise benützen wir auch die Abbildung der hyperbolischen Halbebene auf sich selbst durch komplementäre Ordinaten, die wir auf folgende Weise definieren. Es seien O und X zwei beliebige Punkte der Ebene und F der Fußpunkt des von einem beliebigen außerhalb der Geraden OX gelegenen Punkte P auf die Gerade OX gefällten Lotes; wir bezeichnen mit P' den Punkt des Halbstrahls FP, für welchen die zu der Strecke $FP = y$ und $FP' = y'$ gehörigen Parallelwinkel komplementär sind, so daß

$$\Pi(y) + \Pi(y') = \frac{1}{2}\pi$$

wird (Abb. 1). Wir ordnen jedem Punkte P einer durch die Gerade OX bestimmten Halbebene den nach der obigen Vorschrift eindeutig bestimmten Punkt P' zu.

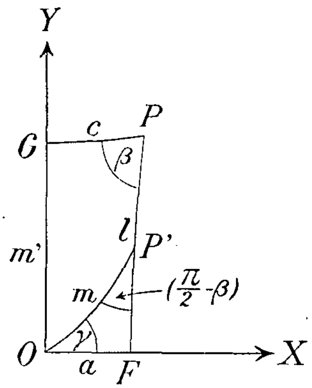

Abb. 1

Die so erklärte Abbildung der durch die Gerade OX bestimmten Halbebene ist eineindeutig und involutorisch.

Aus der obigen Definition folgt sofort, daß *jedem Punkte einer von einem Punkte der Geraden OX ausgehenden Halbgeraden, die auf der Geraden OX senkrecht steht, ein Punkt derselben Halbgeraden entspricht.*

Es sei Y ein von O verschiedener Punkt der in dem Punkte O auf der Geraden OX errichteten Senkrechten und P ein beliebiger Punkt außerhalb der beiden Geraden OX, OY, ferner G der Fußpunkt des von dem Punkte P auf die Gerade OY gefällten Lotes; wenn dann

$$PF = l, \quad OF = a, \quad OG = m', \quad PG = c \quad \text{und} \quad \sphericalangle FPG = \beta$$

ist, so gibt es nach den Sätzen I und II ein rechtwinkliges Dreieck, mit der

Hypotenuse m, den Katheten a und l' und den diesen gegenüberliegenden Winkeln $\frac{\pi}{2}-\beta$ bzw. γ, d. h., es ist $OP'=m$. Hieraus folgt sofort, daß *jedem Punkt, der auf dem Kreise mit dem Mittelpunkt O durch den Punkt P' und auf derselben Seite der Geraden OX wie der Punkt P liegt, ein und nur ein Punkt der Geraden PG entspricht, und umgekehrt.*

Wenn A ein Punkt der Geraden OX ist, so daß $OA=m$ ist, so wird die im Punkte A auf der Geraden OX errichtete Senkrechte zu der Geraden PG parallel, da nach Definition

$$\Pi(m)+\Pi(m')=\frac{1}{2}\pi$$

ist, und so ist die Halbgerade von O aus, die zu der Halbgeraden GP parallel ist, auch zu der Geraden parallel, die im Punkte A auf der Geraden OX senkrecht steht (Abb. 2).

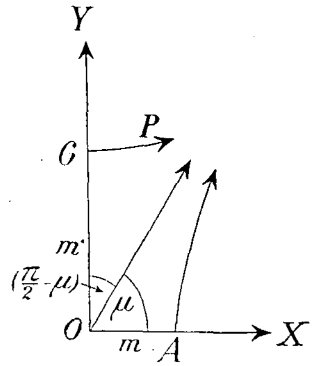

Abb. 2

3. Auf Grund des Obigen läßt sich nun das Axiom K leicht als Satz beweisen. Zu diesem Zwecke sei F der Fußpunkt des von dem Mittelpunkt O des Kreises k auf die beliebige Gerade l gefällten Lotes (Abb. 1). Wenn es einen Punkt der Geraden l im Inneren des Kreises k gibt, so können wir leicht nachweisen, daß auch der Punkt F im Inneren des Kreises k liegt, d. h. wenn wir den Halbmesser des Kreises mit m bezeichnen, so ist $OF<m$. Es sei G ein Punkt der im Punkte O auf der Geraden OF errichteten Senkrechten, so daß $OG=m'$ ist; dann entspricht nach dem Obigen bei der Abbildung der durch die Gerade OF bestimmten und den Punkt G enthaltenden Halbebene durch komplementäre Ordinaten auf sich selbst jedem Punkte des Kreises, welcher derselben Halbebene angehört, ein Punkt der in G auf der Geraden OG errichteten Senkrechten und umgekehrt; ferner entspricht jedem Punkte der Geraden l, welcher dieser Halbebene angehört, ein auf derselben Halbebene liegender Punkt der Geraden l. Die Gerade l und die im Punkte G auf der Geraden OG errichtete Senkrechte haben einen Punkt P gemein; im entgegengesetzten Falle wäre, falls die Strecke OF mit a bezeichnet wird,

$$\Pi(a)+\Pi(m')\leqq\frac{1}{2}\pi$$

im Gegensatz zu unserer Voraussetzung, daß $a<m$ ist. Dem Punkte P entspricht nach dem Obigen ein Punkt P' der Geraden l derart, daß $OP'=m$ ist, d. h., es ist P' ein gemeinsamer Punkt des Kreises k und der Geraden l, w. z. b. w.

Es seien nun k und k_1 zwei Kreise mit dem Mittelpunkten O bzw. O_1; wir setzen voraus, daß der Kreis k_1 einen Punkt im Inneren und einen anderen im Äußeren des Kreises k hat. Es seien weiterhin A, A' zwei Punkte des Kreises k und B, B' zwei Punkte des Kreises k_1, die auf der Geraden OO_1 liegen; nach unserer Voraussetzung lassen sich diese Punkte stets in der Weise bezeichnen, daß der Punkt A zwischen B und B' und auch zwischen A' und B' und ferner der Punkt B zwischen A' und B' und auch zwischen A und A' liegt.

Wir betrachten eine der beiden durch die Gerade AB bestimmten Halbebenen und bezeichnen mit k und k_1 auch die durch die Punkte A, A' und B, B' bestimmten Halbkreise der Kreise k bzw. k_1, deren sämtliche Punkte dieser Halbebene angehören. Bei der Abbildung dieser Halbebene durch komplementäre Ordinaten auf sich selbst entspricht den Halbkreisen k und k_1 je eine Gerade, die zufolge der Eineindeutigkeit der Abbildung voneinander verschieden sind. Die in den Punkten B und A auf der Geraden AB errichteten Senkrechten schneiden die den Halbkreisen k und k_1 entsprechenden Geraden in den Punkten F bzw. G; wir bezeichnen mit f eine Halbgerade der ersten Geraden von dem Punkt F aus, die auf derselben Seite der Geraden BF wie der Punkt A liegt, und mit g eine Halbgerade der zweiten Geraden von G aus, die auf derselben Seite der Geraden AG wie der Punkt B liegt (Abb. 3). Nach unserer obigen Überlegung ist die Halbgerade f zu der Halbgeraden AG parallel; da ferner alle Punkte der Halbgeraden f auf ein und derselben Seite der Geraden AB liegen, so schneidet die Halbgerade f die Gerade AB nicht; somit folgt nach Axiom II 4, daß die Halbgerade f mit der Strecke BG keinen Punkt gemein hat, und somit liegt f außerhalb des Winkels BFG. Hieraus ergibt sich, daß die Halbgerade f und der Punkt A auf verschiedenen Seiten der Geraden FG liegen, da sie sich auf ein und derselben Seite der durch den anderen Schenkel des Winkels BFG bestimmten Geraden BF befinden. Auf ähnliche Art schließen wir, daß die Halbgerade g auf derselben Seite der Geraden FG liegt wie die Halbgerade f. Die Gerade BF zerfällt in zwei vom Punkte F ausgehende Halbgeraden; wenn wir diejenige dieser Halbgeraden mit h bezeichnen, die auf derselben Seite der Geraden FG liegt wie die Halbgerade f, so ist nach dem Obigen die Halbgerade g zu der Halbgeraden h parallel. Hieraus folgt, daß die Halbgeraden f und g einen Punkt P gemein haben. Wenn dann Q der Fußpunkt des von dem Punkte P auf die Gerade AB gefällten Lotes ist und P' ein solcher Punkt des Halbstrahls QP ist, daß die zu den Strecken $QP = y$ und $QP' = y'$ gehörigen Parallelwinkel einander zu einem

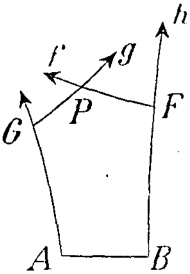

Abb. 3

rechten Winkel ergänzen, d. h.

$$\Pi(y)+\Pi(y')=\frac{1}{2}\pi$$

wird, so ist P' ein gemeinsamer Punkt der Kreise k und k_1, w. z. b. w.

Literaturverzeichnis

[1] H. G. FORDER, *The foundations of euclidean geometry* (Cambridge, 1927).
[2] J. C. H. GERRETSEN, Die Begründung der Trigonometrie in der hyperbolischen Ebene, *Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam*, **45** (1942), 360—366, 479—483, 559—566.
[3] D. HILBERT, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, *Math. Annalen*, **57** (1903), 137—150.
[4] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 8. Aufl. (Stuttgart, 1956), Anhang III, 159—177.
[5] B. KERÉKJÁRTÓ, *Les fondements de la géométrie*. I (Budapest, 1955).
[6] H. LIEBMANN, Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und neue Begründung der trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie, *Math. Annalen*, **61** (1905), 185—199.
[7] H. LIEBMANN, *Nichteuklidische Geometrie*, 3. Aufl. (Berlin und Leipzig, 1923).
[8] F. SCHUR, Zur Bolyai—Lobatschefskijschen Geometrie, *Math. Annalen*, **59** (1904), 314—320.
[9] P. SZÁSZ, A hiperbolikus sik analitikus geometriájának independens elemi felépitése a Hilbert-féle „végkalkulus" alapján, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **6** (1956), 423—438.
[10] P. SZÁSZ, New proof of the circle axiom for two circles in the hyperbolic plane by means of the end-calculus of Hilbert, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, **1** (1958), 97 - 100.

(Eingegangen am 20. Mai 1960)